Woonplaats: Groningen | Jaar van eerste inschrijving: 2004. | Naam docent: Arjan vd

1a Stationaire oplossing: $f(t;x,y) = 0$

met $f(t,x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1-x \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow 2xy = 0 \qquad \Rightarrow y=0.$

$1-x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\underline{(x,y)=(1,0)}$

b. alleen x constant. $2xy=0$ stel $x \neq 0 \Rightarrow y=0$. dan is óf $x=1$ (allebei constant) of $x \neq 1 \Rightarrow$ $\exists t$ met $y(t) \neq 0 \Rightarrow 2xy \neq 0 \Rightarrow$ tegenspraak.

Dus $x=0$ en dus ook $x(t) = \dot{x}(t) = 0$.

$\dot{y}(t) = 1 \Rightarrow y = t + C_2$. er bestaat een oplossing

c $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-x}{2xy}$

Scheiden van variabelen.

$$\int_{y_0}^{y} 2y\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{(1-x)}{x}dx$$

$$y^2 + C_1 = \ln|x| - x + C_2 \qquad C_1 = -y_0^2$$

$$y = \pm\sqrt{\ln|x| - x - C} \qquad C_2 = -(\ln x_0 - x_0).$$

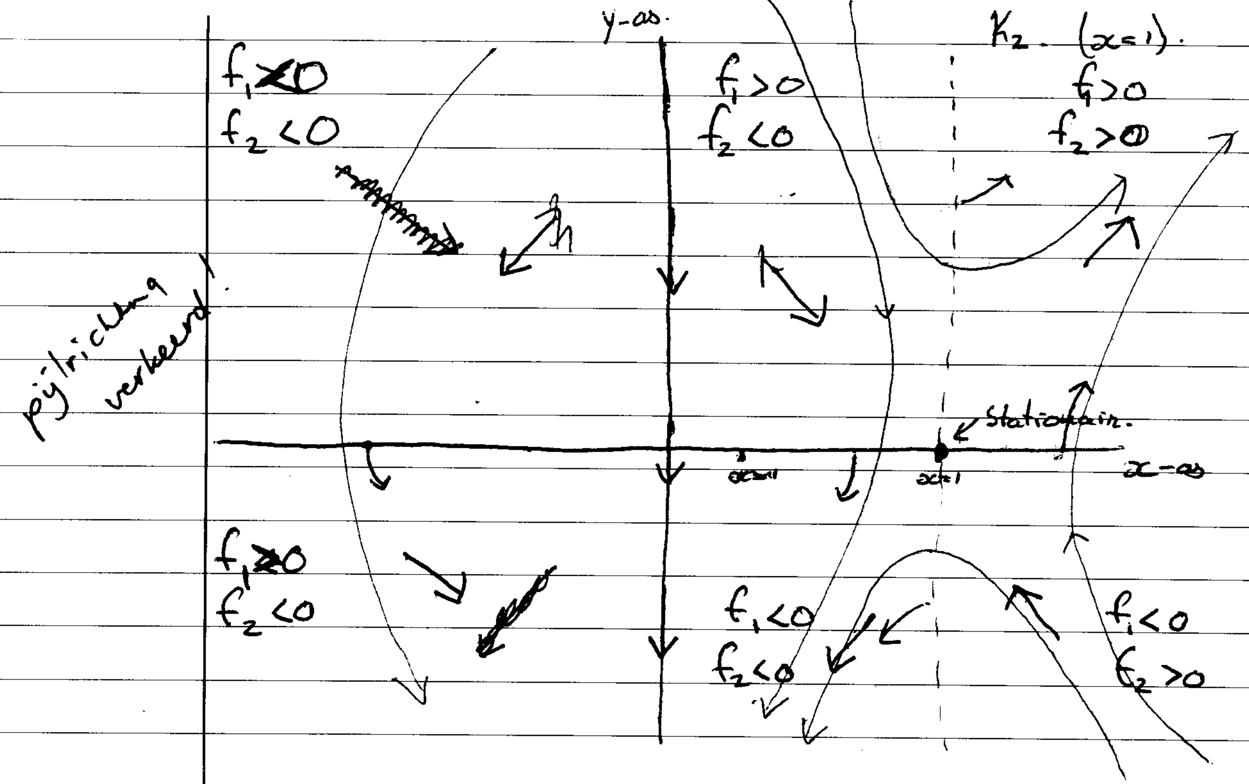
$(C = C_1 - C_2)$.

d $K_1 = \{(x,y) \mid f_1(x,y) = 0\}$. $\qquad f_1 = 2xy$

$K_1 = \{(x,y) \mid x=0 \text{ of } y=0\}$.

$K_2 = \{(x,y) \mid f_2(x,y) = 0\}$. $\qquad f_2 = 1-x$.

$= \{(x,y) \mid x = 1\}$



$K_1 = x\text{-as} \cup y\text{-as}$.

Ik kan geen periodieke banen vinden. (Behalve het semi perio
stationaire punt).

$x=t$. 2a. $y(t) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1} y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds.$

met $\Phi(t) = e^{At}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bepaling Φ

- eigen waarde A. $\left|\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right| = (2+\lambda)^2 - 1$

  $\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -1$

- eigenvectoren A.

  $\text{kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span}\left(\left\{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right\}\right) \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $\text{kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{span}\left(\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right\}\right) \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- controle: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$T\tilde{A}T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = A$

- $e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(e^{-3t} + e^{-t} \quad -e^{-3t} + e^{-t})$

Adres: Kasper [illegible] | Studierichting: Wis. | Tentamen: GDV
Postcode en | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: 21-4-2006
Woonplaats: | | Naam docent: Arjan vdS.

$$\begin{pmatrix} e^{-3t}+e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{t} \end{pmatrix} = 2e^{-2t}\cosh t.$$
$$\begin{pmatrix} -e^{-3t}+e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} e^{t}-e^{-t} \end{pmatrix} = 2e^{-2t}\sinh t.$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} e^{2t} = \Phi(-t).$$

Omdat A tijdsonafhankelijk is geldt ook: $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ $= \Phi^{t,t_0} = \Phi(t-t_0)$.

$$-\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^{3t}+e^{t} \\ e^{t}-e^{2t} \end{pmatrix} dt.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t}+e^{t}-\frac{1}{3}e^{t_0}-e^{t_0} \\ -\frac{1}{3}e^{3t}+e^{t}+\frac{1}{3}e^{t_0}-e^{t_0} \end{pmatrix}.$$

Door tijd gebrek geen verder invulwerk gepleegd.

6. $y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0 . \qquad \Phi(x) = \cancel{A}e^{Ax} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- eigenwaarde $p(\lambda) = \lambda(\lambda+2)+1 = \lambda^2+2\lambda+1$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

$$\text{kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span}\left(\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}\right). \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\cancel{\mu}\quad N\mu^{(1)} = 0 \qquad N\mu^{(1,2)} = \mu^{(1)}$.

$$Im(N) = \text{span}\left(\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}\right) \Longrightarrow \mu^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mu^{(1,2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \Phi(x) = Te^{\tilde{A}x}T^{-1}$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cancel{e}\, e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-x}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{taylor}.$$

$$= e^{-x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= e^{-x}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}.$$

$$\Phi^{-1}(x) = e^{+x}\begin{pmatrix} 1+x & -x \\ +x & 1-x \end{pmatrix}\frac{1}{(1-x)(1+x)+x^2}$$

$$\Phi^{-1}(x)\Phi^{-1}(x_0) = e^{x-x_0}\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+x_0 & -x_0 \\ +x_0 & 1-x_0 \end{pmatrix}\cancel{\frac{1}{1-x_0^2+x_0^2}}.$$

$$= e^{-x+x_0}\begin{pmatrix} 1+x_0-x & x-x_0 \\ -x+x_0 & 1+x-x_0 \end{pmatrix}$$

$= \Phi(x-x_0)$.

$y = \cancel{\Phi(x)x_0}\ \Phi(x-x_0)\cdot y_0$

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: 2004 | Naam docent: Arjan vd

c. Bepaal eerst homogene oplossingen van de vorm $c_i e^{\lambda_i x}$.

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \Rightarrow 0. \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$

$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

Als $c = 0$ geldt de homogene oplossing.
Als $c = 1$. opzoek naar een partiele oplossing.

$y(t) = c_1(t) u_1(t) + c_2(t) u_2(t) \qquad u_1(t) = e^{-t} \quad u_2(t) = te^{-t}$

$c_1(t) = -\int^t \frac{u_2(t) f(t)}{w(t) a_0(t)} dt \quad c_2(t) = \int^t \frac{u_1(t) f(t)}{w(t) a_0(t)} dt$

$a_0(t) = 1$
$f(t) = e^t$
$w(t) = u_1(t) u_2'(t) - u_2(t) u_1'(t)$
$= -e^{-t} te^{-t} + e^{-t} \cdot e^{-t} + te^{-t} e^{-t} = e^{-2t}$

$-c_1(t) = \int^t \frac{t}{e^{-2t}} dt = \int t e^{2t} dt$

$= \frac{t}{2} e^{2t} \Big|^t - \int \frac{e^{2t}}{2} dt.$

$= \frac{1}{2} e^{2t} \left[t - \frac{1}{2} \right] + d_1.$

$c_2(t) = \int^t e^{2t} dt$

$= \frac{1}{2} e^{2t} + d_2.$

$y(t) = -\frac{1}{2} e^{t} \left(t - \frac{1}{2} \right) + d_1 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{t} + d_2 t e^{-t}$
$= \cancel{te^t} \frac{1}{4} e^t + d_1 e^{-t} + d_2 t e^{-t}.$

~~Controle (kies $d_1 = d_2 = 0$ omdat ik vertrouwen in het homogene deel he~~
~~$y(t) = te^t + e^t + \frac{1}{4} e^t$~~

3a. $\frac{dy}{dx} = Ay$

$\Rightarrow c\frac{dy}{dx} = cAy = \frac{dcy}{dx} = \frac{dz}{dx} = 0. \quad \forall y$

Stel $cAy = 0$. $\quad Ay = \frac{dy}{dx}$ invullen.

$c\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dz}{dx} = 0.$

Dus c is een Lc van beweging ~~als~~ van het stelsel $\dot{y}$:
dan en ~~als~~ blecht dan $cAy = 0. \quad \forall y.$
oftewel als. $cA = 0$ &

Schrijf A is zijn Jordan form. $\tilde{A}$

$cA = c T\tilde{A}T^{-1} = 0.$

De (rij) eigenwaarde van A voldoen aan $cA = \lambda c$.
$\Rightarrow \lambda = 0$ als λ een (rij) eigenwaarde is van A.

b. er geldt dus. $\Phi_1(0).C = \Phi_2(0)$.

er geldt ook. $\frac{d\Phi_i}{dx} = A\Phi_i \qquad i = 1,2.$
dus
$y = \Phi_i(x)\Phi_i(0)^{-1}y_0 + \ldots$

dus $\Phi_1(x)\Phi_1(0)^{-1} = \Phi_2(x)\Phi_2(0)^{-1}$

Φ_i = inverteerb

$\Phi_1(x)\Phi_1(0)^{-1}\Phi_2(0) = \Phi_2(x)$
$\Rightarrow \Phi_1(x)C = \Phi_2(x).$ &

c. $y = e^{\mu x} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\dot{y} = \mu e^{\mu x} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mu \cdot y = y\mu$.

$\mu y = Ay + e^{\mu x} b$.

als μ een eigenwaarde is geldt $\mu y = Ay$
$\Rightarrow e^{\mu x} b = 0$.
dit geldt alleen als $b = 0$ (dan niet meer inhomogeen)
tegenspraak.

d. $y = \Phi(x) \Phi^{-1}(x_0) y_0 = \Phi(x) x_0$.

$\Phi(x) = e^{Ax} = T e^{\tilde{A}x} T^{-1}$
T, T^{-1} constant.
$e^{\tilde{A}x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & & & \\ & e^{\lambda x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & x & \frac{1}{2}x^2 \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

vb als A niet diagonaliseerbaar is
$\Rightarrow e^{\tilde{A}x}$ is begrensd als A diagonaliseerbaar is
$\Rightarrow$ algebraische m. = geo. m.
verder moeten alle $\lambda_i \leq 0$ opdat $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ begrensd

als $\exists \lambda_i < 0$ dan hoeft a. m = g. m. niet meer te gelden aangezien $e^{\lambda x} \cdot x^n \to 0$ voor $\lambda < 0$.

als ~~$\lim y(x) \neq a$~~ $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ moet gelden

dan moet $\lambda_i = 0$ $\forall$ eigenwaarde van A.

$\operatorname{Re} \lambda_i = 0$!

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

5a) kies $y = e^{\lambda x}$.

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$ $\lambda = -1 \pm i$;

$y = e^{-x}\left((c_1 + c_2)\cos x + i(c_1 - c_2)\sin x.\right)$.

$y(\frac{1}{2}\pi) = 0.$ $\cos \frac{1}{2}\pi = \cos -\frac{1}{2}\pi = 0.$

$\Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad c_1 = c_2 = d.$

$\underline{y = 2de^{-x}\cos x.}$

b) greense functie $G(x,s) = \dfrac{u_1(x)u_2(s)}{\omega(s)\, p(s)} \quad x \leq s$

$= \dfrac{u_1(s)\, u_2(x)}{\omega(s)\, p(s)} \quad x \geq s.$

~~$a = -b = -\frac{1}{2}\pi.$~~

~~$u_1(a) = 0 \Rightarrow (c_1 - c_2)e^{-x} = 0.$~~

~~$u_2(b) = 0$~~

$\lambda = 0.$

homogene deel.

$\lambda^2 + 2\lambda = 0.$ $\lambda = 0$ of $\lambda = -2.$

$u_1(a) = 0$

$\Rightarrow 0 = c_1 + c_2 e^{\pi}$ $\quad c_1 = -e^{\pi}$

$\frac{c_1}{c_2} = -e^{\pi}.$ (by u_2).

$u_1 = e^{-2x} - e^{+\pi}$

$u_2 = e^{-2x} - e^{-\pi}$

$y = \int_a^b G(x,s) f(s)\, ds.$

$= \int_a^x \dfrac{u_1(s)\, u_2(x) f(s)}{\omega(s)} ds + \int_x^b \dfrac{u_1(x)\, u_2(s) f(s)}{\omega(s)} ds.$

$\omega(s) = -2(e^{-2x} - e^{\pi})e^{-2x} + 2(e^{-2x} - e^{-\pi})e^{-2x} = 2e^{-2x}(e^{\pi} - e^{-\pi})$

$y = \int \ldots$

$p(s) = 1.$

~~4~~. De oplossing is uniek als er geen niet ~~nul~~ triviale ~~op~~ nul oplossingen bestaan.

Homogene oplossing $\Rightarrow$ $y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x}$

$y(a) = y(b) = 0$.

$u_1 = e^{-2x} - e^{\pi}$ Algemene oplossing $= C_1 u_1 + C_2 u_2$.

$u_2 = e^{-2x} - e^{-\pi}$

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0$$ om aan randvoorwaarde te voldoen.

$D = \det(\ ) = (e^{-2a} - e^{\pi})(e^{-2b} - e^{-\pi}) - (e^{-2b} - e^{\pi})(e^{-2a} - e^{-\pi})$.

$= 0.0 \quad - (e^{-\pi} - e^{\pi})(e^{\pi} - e^{-\pi}) \neq$

$\Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow$ uniek

4 $F(y) = y_0 + \int_0^x f(s, y)\, ds$.

$y_1 = 1$.

$y_2 = y_0 + \int_0^x s + 1\, ds = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

$y_3 = y_0 + \int_0^x \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 . dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

$y_4 = y_0 + \int_0^x \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \cancel{2x} + 1 = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x +$

$y_n = \frac{1}{n!}x^n + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{2}{i!}x^i + x + 1$. 8

6. Variatie van constante + scheiden van variabelen

$\int \frac{dy}{y} = \int dx$

$\ln|y| = x + C \quad y = Ce^x$

$C'e^x + \cancel{Ce^x} = x + \cancel{Ce^x} \quad C' = xe^{-x}$

$C = \int xe^{-x} dx$

$= -xe^{-x}\Big|^x + \int^x e^{-x} dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$.

$= -e^{-x}(1+x) + C$.

$y = Ce^x - x - 1$

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

4b. $Y = 2e^x - x - 1.$

$$Y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$